

การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 15
โรงเรียนราชสีมาวิทยาลัย จังหวัดนครราชสีมา
6 พฤษภาคม 2561

วันแรก
เวลา: 4.5 ชั่วโมง

- ให้วงกลมแนบในของรูปสามเหลี่ยม ABC สัมผัส BC, CA, AB ที่จุด D, E, F ให้ P, Q เป็นจุดกึ่งกลางของด้าน DF, DE ให้ PC ตัด DE ที่จุด R และ BQ ตัด DF ที่จุด S
 - จงแสดงว่า B, C, P, Q อยู่บนวงกลมเดียวกัน
 - จงแสดงว่า P, Q, R, S อยู่บนวงกลมเดียวกัน
- จงแสดงว่าไม่มีฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่ง $f(x + f(y)) = f(x) + y^2$ สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y
- แม่หญิงการะเกดแจกแฟลชไดรฟ์ที่บันทึกข้อมูลกลับทางประวัติศาสตร์ ชนิดความจุ 1, 2, 4, 8, 16 และ 32 GB ชนิดละ 3 แห่ง ให้บ่าว 6 คน คนละ 3 แห่ง โดยแต่ละคนได้รับแฟลชไดรฟ์ชนิดความจุแตกต่างกันทั้งสามแห่ง เพื่อนำไปมอบให้แก่เจ้าเมืองนครราชสีมาเก็บรักษาไว้ในปราสาทหินต่างๆ
จงแสดงว่า มีความจุสองชนิดซึ่งบ่าวแต่ละคนได้รับแฟลชไดรฟ์เพียงชนิดใดชนิดหนึ่งเท่านั้น หรือ ผลบวกความจุแฟลชไดรฟ์ทั้งสามแห่งของบ่าวแต่ละคนมีค่าแตกต่างกันหมด
- ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ โดยที่ $a + b + c = 0$ จงหาค่ามากที่สุดของ

$$\frac{a^2b^2c^2}{(a^2 + ab + b^2)(b^2 + bc + c^2)(c^2 + ca + a^2)}$$

- จงหาค่าน้อยสุดของ $a + b$ ซึ่ง a และ b เป็นจำนวนเต็มบวกที่หารด้วย 5 ไม่ลงตัว แต่ $a^5 + b^5$ หารด้วย 5 ลงตัว

การแข่งขันคณิตศาสตร์โอลิมปิกระดับชาติ ครั้งที่ 15
โรงเรียนราชสีมาวิทยาลัย จังหวัดนครราชสีมา
7 พฤษภาคม 2561

เวลา: 4.5 ชั่วโมง

6. กำหนดให้ A เป็นเซตของสามสิ่งอันดับ (x, y, z) ของจำนวนนับที่ทำให้ $2x^2 + 3y^3 = 4z^4$
- ถ้า (x, y, z) เป็นสมาชิกของ A แล้วจงแสดงว่า 6 หาร x, y, z ลงตัว
 - จงแสดงว่า A เป็นเซตอนันต์
7. มีสี 25 สี นำมาระบายสมาชิกแต่ละตัวของเซต $S = \{1, 2, \dots, 61\}$ ตัวละหนึ่งสีโดยไม่จำเป็นต้องใช้ครบทุกสี ให้ m คือจำนวนสับเซตที่ไม่ใช่เซตว่างของ S ที่สมาชิกทุกตัวในสับเซตนี้มีสีเดียวกันหมด จงหาค่าน้อยสุดที่เป็นไปได้ของ m
8. สลาก $2n+1$ ใบ มีจำนวนเต็มบวกที่แตกต่างกันเขียนกำกับไว้ใบละหนึ่งจำนวน โดยผลบวกของจำนวนที่เขียนกำกับสลากทุกใบมีค่ามากกว่า 2330 แต่ผลบวกของจำนวนที่เขียนกำกับบนสลาก n ใบใดๆ มีค่าไม่เกิน 1165 จงหาค่ามากที่สุดที่เป็นไปได้ของ n
9. ให้วงกลมแนบในของรูปสามเหลี่ยม ABC สัมผัสด้าน AB ที่จุด D ให้ P เป็นจุดบนส่วนของเส้นตรง BC ที่ไม่ใช่จุด B และ C ให้ K, L เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในของรูปสามเหลี่ยม ABP, ACP ตามลำดับ ถ้าวางกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม KPL ตัด AP อีกครั้งที่จุด Q จงพิสูจน์ว่า $AD = AQ$
10. ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับศูนย์ จงแสดงว่าถ้าฟังก์ชัน $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ สอดคล้อง

$$af(x+y) + bf(x-y) = cf(x) + g(y)$$

สำหรับทุก x, y ซึ่ง $y > 2018$ แล้วจะมีฟังก์ชัน $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + h(y)$$

สำหรับทุกจำนวนจริง x และ y