ข้อสอบการคัดเลือกเพิ่มเติมครั้งที่ ๑ คณิตศาสตร์โอลิมปิก

วันที่ ๒๔ ธันวาคม พ.ศ. ๒๕๕๕ เวลา ๙.๐๐ – ๑๓.๓๐ น.

โจทย์ข้อที่ 1. จงหาฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ทั้งหมดที่ทำให้

$$f(x+f(y))-f(x)=(x+f(y))^{2013}-x^{2013}$$ สำหรับทุกๆจำนวนจริง x,y

โจทย์ข้อที่ 2. กำหนดให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก และ $G=\left\{z\in C \mid z^n=1\right\}$
จงหาฟังก์ชัน $f:G\to\mathbb{Z}^+$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

(i) $f(z)=1$ ก็ต่อเมื่อ $z=1$

(ii) $f(z^k)=\dfrac{f(z)}{\gcd(f(z),k)}$ สำหรับทุกๆ $z\in G$ และทุกๆจำนวนเต็มบวก n

โจทย์ข้อที่ 3. ให้ I เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในของสามเหลี่ยม ABC วงกลม I สัมผัสด้าน BC,CA,AB ที่จุด D,E,F ตามลำดับ และวงกลม k ตัดด้าน EF,FD,DE ที่จุด X_1,X_2,X_3,X_4,X_5,X_6 ตามลำดับซึ่งเป็นจุดที่แตกต่างกันทั้งหมด
ถ้า X_1X_4,X_2X_5,X_3X_6 ผ่านจุด G ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม k จงพิสูจน์ว่า

(i) A,D,G อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน

(ii) ถ้าเส้นตรงที่ผ่านจุด G และขนานกับ DE ตัด BC ที่จุด P และเส้นตรงที่ผ่านจุด G และขนานกับ DF ตัด BC ที่จุด Q แล้ว จงพิสูจน์ว่า $IP=IQ$

ข้อสอบการคัดเลือกเพิ่มเติมครั้งที่ ๑ คณิตศาสตร์โอลิมปิก

วันที่ ๑๗ มกราคม พ.ศ. ๒๕๕๖ เวลา ๙.๐๐ – ๑๓.๓๐ น.

โจทย์ข้อที่ 1. จงหาฟังก์ชันเพิ่ม $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับ

$$f(mn)=f(m)f(n)$$

สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก m,n

โจทย์ข้อที่ 2. จงหาคู่อันดับของจำนวนเต็มบวก (x,y) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับ

$$x^3+y^3=4(x^2y+xy^2-5)$$

โจทย์ข้อที่ 3. มีก้อนหินอยู่บนพิกัดในระนาบ XY โดยมีกฎว่า ถ้าก้อนหินอยู่ที่พิกัด (x,y) จะสามารถเคลื่อนไปตำแหน่งอื่นได้ดังนี้

(ก) สำหรับจำนวนเต็มบวก z สามารถย้ายไปที่ตำแหน่ง $(x-z,y-z)$

(ข) สามารถย้ายไปยังตำแหน่ง $(3x,y)$ หรือ $(x,3y)$

จงหาพิกัดจำนวนเต็มบวก (m,n) ทั้งหมดที่สามารถเคลื่อนก้อนหินจากพิกัด (m,n) มายังพิกัด $(0,0)$ ได้

ข้อสอบการคัดเลือกเพิ่มเติมครั้งที่ ๑ คณิตศาสตร์โอลิมปิก

วันที่ ๒๑ มกราคม พ.ศ. ๒๕๕๖ เวลา ๙.๐๐ – ๑๓.๓๐ น.

โจทย์ข้อที่ 1. ให้ S เป็นเซตของนักเรียนกลุ่มหนึ่งโดยที่ $\left|S\right| \geq 4$ สมมติว่ามีจำนวนเต็มบวก m ซึ่ง $3 \leq m \leq \left|S\right| - 1$ ที่มีสมบัติว่า สำหรับ $A \subseteq S$ โดยที่ $\left|A\right| = m$ จะมีนักเรียนที่เป็นเพื่อนกับทุกคนใน A อยู่หนึ่งคนเท่านั้น (นักเรียนแต่ละคนไม่เป็นเพื่อนกับตัวเอง) จงพิสูจน์ว่า

(ก) มีสับเซต $B \subseteq S$ ซึ่ง $\left|B\right| = m+1$ ที่นักเรียนทุกคนใน B เป็นเพื่อนกันหมด

(ข) $m+1 = \left|S\right|$

โจทย์ข้อที่ 2. ให้ M เป็นจุดบนส่วนโค้ง $\overset{\frown}{BC}$ ของวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม ABC ที่ไม่รวมจุด A กำหนดให้ I เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในของสามเหลี่ยม ABC และจุด E, F เป็นจุดปลายเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด I ไปยังเส้นตรง MB และ MC ตามลำดับ

จงพิสูจน์ว่า $IE + IF \leq AM$

โจทย์ข้อที่ 3. จงหาคู่อันดับของจำนวนเต็ม (a, b) ทั้งหมดที่สอดคล้องกับ

$n \mid a^n + b^{n+1}$ สำหรับทุกๆจำนวนนับ n

(China Western Mathematical Olympiad 2011)

ข้อสอบการคัดเลือกเพิ่มเติมครั้งที่ ๑ คณิตศาสตร์โอลิมปิก

วันที่ ๒๓ มกราคม พ.ศ. ๒๕๕๖ เวลา ๙.๐๐ – ๑๓.๓๐ น.

โจทย์ข้อที่ 1. ให้ x, y, z เป็นจำนวนจริงบวก จงแสดงว่า

$$\frac{x^2}{y(x+y)+z(z+x)}+\frac{y^2}{z(y+z)+x(x+y)}+\frac{z^2}{x(z+x)+y(y+z)}$$
$$\geq \frac{x}{(x+y)+(z+x)}+\frac{y}{(y+z)+(x+y)}+\frac{z}{(z+x)+(y+z)}$$

โจทย์ข้อที่ 2. ให้ O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบ และ I เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในของสามเหลี่ยมด้านไม่เท่า ABC สมมติว่าวงกลมแนบในสัมผัสด้าน BC, CA, AB ที่จุด D, E, F ตามลำดับ กำหนดให้ AP, BQ, CR เป็นเส้นแบ่งครึ่งมุมของสามเหลี่ยม ABC โดยที่ P, Q, R อยู่บนด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ

ถ้าภาพสะท้อนของเส้นตรง OI เทียบกับด้าน DE และ DF ตัดกันที่จุด X จงพิสูจน์ว่า P, Q, R, X ตั้งอยู่บนวงกลมเดียวกัน

โจทย์ข้อที่ 3. มีกองเหรียญ $k \geq 2$ กอง โดยแต่ละกองมีเหรียญ $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ เหรียญตามลำดับ การย้ายเหรียญทำได้โดยเลือกกองเหรียญสองกองที่มีเหรียญ a, b เหรียญ โดยที่ $a \geq b$ แล้วย้ายเหรียญ b เหรียญออกจากกองแรก (กองแรกคือกองที่มี a เหรียญ) ไปไว้กองที่สอง

จงหาเงื่อนไขจำเป็นและเพียงพอสำหรับ $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k$ ที่ทำให้สามารถย้ายเหรียญทั้งหมดมาไว้ในกองเดียวได้

(Romania National Olympiad 2012)

ข้อสอบการคัดเลือกเพิ่มเติมครั้งที่ ๑ คณิตศาสตร์โอลิมปิก

วันที่ ๒๔ มกราคม พ.ศ. ๒๕๕๖ เวลา ๙.๐๐ – ๑๓.๓๐ น.

โจทย์ข้อที่ 1. ให้ $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ เป็นพหุนามที่ลดทอนไม่ได้
สมมติว่า มีจำนวนอตรรกยะ α ที่ทำให้ $P(\alpha) = 0 = P(-\alpha)$
จงพิสูจน์ว่า มีพหุนามลดทอนไม่ได้ $Q(x) \in \mathbb{Q}[x]$ ที่ทำให้ $P(x) = Q(x^2)$

โจทย์ข้อที่ 2. จงหาจำนวนเต็มบวก n ทั้งหมด ที่ทำให้

$$\left\lfloor \frac{1000000}{n} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{1000000}{n+1} \right\rfloor = 1$$

(ดัดแปลงจาก Japan Mathematical Olympiad Preliminary 2012)

โจทย์ข้อที่ 3. กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยมซึ่ง $AB > AC$ ให้วงกลมแนบในสามเหลี่ยม ABC สัมผัสด้าน BC, CA, AB ที่จุด D, E, F ตามลำดับ ลากเส้นแบ่งครึ่งมุม $B\widehat{A}C$ ตัด DE และ DF ที่จุด K และ L ตามลำดับ ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางด้าน BC และ H เป็นจุดปลายของเส้นส่วนสูงที่ลากจากจุด A ในสามเหลี่ยม ABC

จงพิสูจน์ว่า $M\widehat{L}K = M\widehat{H}K$

ข้อสอบการคัดเลือกเพิ่มเติมครั้งที่ ๒ คณิตศาสตร์โอลิมปิก

วันที่ ๑๖ มีนาคม พ.ศ. ๒๕๕๖ เวลา ๙.๐๐ – ๑๓.๓๐ น.

โจทย์ข้อที่ 1. ให้ $P_1, P_2, \ldots, P_n$ $(n \geq 3)$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ถ้าผลคูณของระยะห่างจากจุด Q ซึ่งเป็นจุดบนวงกลมใดๆ ไปยังจุด $P_1, P_2, \ldots, P_n$ มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 2 จงแสดงว่า จุด $P_1, P_2, \ldots, P_n$ เป็นจุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่ามุมเท่า

โจทย์ข้อที่ 2. จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับสมการเชิงฟังก์ชัน

$$f\left(2x + \frac{1}{1+x+y}\right) = f(x) + f\left(x + \frac{1}{1+x+y}\right)$$ สำหรับทุกจำนวนจริงบวก x, y

โจทย์ข้อที่ 3. ให้ S เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกทั้งหมดที่มี 11 หลักพอดี ให้ $A \subseteq S$ โดย $x \in A$ เป็นตัวเลขโดดเดี่ยว ก็ต่อเมื่อ ไม่มี $y, z \in A$ (อาจไม่แตกต่างกัน) ที่ทำให้ $y + z$ หาร x ลงตัว ถ้าให้เซต A มีตัวเลขโดดเดี่ยวไม่เกิน10 ตัว แล้ว จงหาจำนวนสมาชิกของเซต A ที่มากที่สุดที่เป็นไปได้

ข้อสอบการคัดเลือกเพิ่มเติมครั้งที่ ๒ คณิตศาสตร์โอลิมปิก

วันที่ ๒๐ มีนาคม พ.ศ. ๒๕๕๖ เวลา ๙.๐๐ – ๑๓.๓๐ น.

โจทย์ข้อที่ 1. จงหาสามสิ่งอันดับ (x, y, z) ทั้งหมดของจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $x \le y \le z$ ที่สอดคล้องกับสมการ

$$x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2)$$

โจทย์ข้อที่ 2. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก และ $abc = 1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\frac{1}{1 + a^4 + (b^2 + 1)^2} + \frac{1}{1 + b^4 + (c^2 + 1)^2} + \frac{1}{1 + c^4 + (a^2 + 1)^2} \le \frac{a}{c + 2b + 3} + \frac{b}{a + 2c + 3} + \frac{c}{b + 2a + 3}$$

โจทย์ข้อที่ 3. สามเหลี่ยม ABC มี O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบ และ I เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบใน ให้ D, E, F เป็นจุดบนด้าน BC, CA, AB ตามลำดับ ซึ่ง $BD + BF = AC$ และ $CD + CE = AB$ ให้วงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม BDF และสามเหลี่ยม CDE ตัดกันที่จุด $P \neq D$

จงพิสูจน์ว่า $OP = OI$

ข้อสอบการคัดเลือกเพิ่มเติมครั้งที่ ๒ คณิตศาสตร์โอลิมปิก

วันที่ ๓๑ มีนาคม พ.ศ. ๒๕๕๖ เวลา ๙.๐๐ – ๑๓.๓๐ น.

โจทย์ข้อที่ 1. ตารางขนาด 2556×2556 บางช่องมีสีขาว และที่เหลือมีสีแดง ให้ T เป็นจำนวนสามสิ่งอันดับ (c_1, c_2, c_3) ของช่องในตาราง ซึ่ง c_1, c_2 อยู่ในแถวเดียวกัน และ c_2, c_3 อยู่ในหลักเดียวกัน โดยที่ c_1, c_3 มีสีขาว และ c_2 มีสีแดง จงหาค่ามากที่สุดของ T ที่เป็นไปได้

โจทย์ข้อที่ 2. จงหาฟังก์ชัน $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ทั้งหมด ที่สอดคล้องกับสมการ

$$(f(x+y)+f(x-y))^2 = 4f(x)^2 \quad \text{สำหรับทุก } x, y \in \mathbb{R}$$

โจทย์ข้อที่ 3. กำหนดให้ x, y เป็นจำนวนเต็มบวก ถ้า $x^{2^n}-1$ หารด้วย $2^n y+1$ ลงตัว สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n แล้ว จงแสดงว่า $x=1$

ข้อสอบการคัดเลือกเพิ่มเติมครั้งที่ ๒ คณิตศาสตร์โอลิมปิก

วันที่ ๒ เมษายน พ.ศ. ๒๕๕๖ เวลา ๙.๐๐ – ๑๓.๓๐ น.

โจทย์ข้อที่ 1. กำหนดส่วนของเส้นตรง $n \geq 4$ เส้น ซึ่งขนานกันและอยู่ในระนาบเดียวกัน โดยส่วนของเส้นตรงใดๆที่ขนานกันสามเส้น จะมีเส้นตรงที่ตัดส่วนของเส้นตรงทั้งสามเส้นเสมอ จงแสดงว่ามีเส้นตรงเส้นหนึ่งที่ตัดส่วนของเส้นตรงทั้ง n เส้น

โจทย์ข้อที่ 2. กำหนดให้ $a,b,c > 0$ จงพิสูจน์ว่า

$$32\left(\frac{1}{7+(a-3)^2}+\frac{1}{7+(b-3)^2}+\frac{1}{7+(c-3)^2}\right) \leq \frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}+6$$

โจทย์ข้อที่ 3. กำหนดสามเหลี่ยมมุมแหลม ABC มีจุด D,E,F เป็นจุดปลายของเส้นส่วนสูงที่ลากจากจุดยอด A,B,C ตามลำดับ ให้ I_1,I_2 เป็นจุดศูนย์กลางวงแนบในสามเหลี่ยม AEF และ BFD ตามลำดับ และ O_1,O_2 เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบสามเหลี่ยม AI_1C และ BI_2C ตามลำดับ จงพิสูจน์ว่า I_1I_2 ขนานกับ O_1O_2

ข้อสอบการคัดเลือกเพิ่มเติมครั้งที่ ๒   คณิตศาสตร์โอลิมปิก

วันที่ ๓ เมษายน พ.ศ. ๒๕๕๖   เวลา ๙.๐๐ – ๑๓.๓๐ น.

โจทย์ข้อที่ 1. ให้สามเหลี่ยม ABC ซึ่ง $AB \neq AC$ มี O เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบ เส้นแบ่งครึ่งมุม $B\widehat{A}C$ ตัด BC ที่จุด D สะท้อนจุด D ข้ามจุดกึ่งกลางด้าน BC ไปยังจุด E ให้เส้นตรงที่ลากผ่านจุด E และตั้งฉากกับ BC ตัด AD ที่ Y และเส้นตรงที่ลากผ่านจุด D และตั้งฉากกับ BC ตัด AO ที่ X จงพิสูจน์ว่าจุด X, B, Y, C ตั้งอยู่บนวงกลมวงเดียวกัน

โจทย์ข้อที่ 2. กำหนดให้ $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนของเซต $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ ซึ่งสำหรับ $i \in \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, $\left|a_{i+1} - a_i\right|$ มีค่าแตกต่างกันหมด จงแสดงว่า $a_1 - a_{2n} = n$ ก็ต่อเมื่อ ทุก $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $1 \leq a_{2k} \leq n$

โจทย์ข้อที่ 3. ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ กำหนด $f^m = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{m}$ (compose กัน m ตัว) โดยสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ มี $k \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $f^{2k}(n) = n + k$ ให้แต่ละ $n \in \mathbb{N}$ มีค่า k น้อยที่สุดที่สอดคล้องคือ k_n จงพิสูจน์ว่า ลำดับ $k_1, k_2, k_3, \ldots$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

ข้อสอบการคัดเลือกเพิ่มเติมครั้งที่ ๒ คณิตศาสตร์โอลิมปิก

วันที่ ๕ เมษายน พ.ศ. ๒๕๕๖ เวลา ๙.๐๐ – ๑๓.๓๐ น.

โจทย์ข้อที่ 1. สำหรับสับเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง X, Y ของ $\mathbb{Q}$
ให้ $X+Y$ แทนเซต $\{x+y \mid x\in X, y\in Y\}$
จงพิจารณาพร้อมให้เหตุผลประกอบว่า มีสับเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง A, B, C ของ $\mathbb{Q}$ หรือไม่
ที่สับเซตแต่ละคู่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน โดย $A\cup B\cup C=\mathbb{Q}$ และเซต $A+B, B+C, C+A$
มีสมบัติว่า เซตแต่ละคู่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน

โจทย์ข้อที่ 2. เราเรียกจำนวนเต็ม a ว่า "จำนวนฟอสซิล"
เมื่อสมการ $(m^2+n)(n^2+m)=a(m-n)^3$ มีผลเฉลยในเซตของจำนวนเต็มบวก

(ก) จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนฟอสซิลในเซต $\{1, 2, \ldots, 2012\}$ อย่างน้อย 500 ตัว

(ข) จงพิจารณาพร้อมให้เหตุผลประกอบว่า 2 เป็น"จำนวนฟอสซิล" หรือไม่

โจทย์ข้อที่ 3. กำหนดเซตจำกัด $S\subseteq\mathbb{N}$ ซึ่ง $|S|\geq 2$ และสมาชิกที่มากที่สุดกับสมาชิกที่น้อยที่สุดมีตัวหารร่วมมากเป็น 1 ให้ S_n แทนเซตของจำนวนเต็มบวก ที่สามารถเขียนเป็นผลบวกของสมาชิกใน S ได้อย่างมาก n ตัว (อาจไม่แตกต่างกัน) ให้สมาชิกที่มากที่สุดของ S คือ a
จงแสดงว่า มีจำนวนเต็มบวก k ซึ่งสำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $m>k$, $|S_{m+1}|-|S_m|=a$